گزارش پروژه محاسبات عددی

۱ درونیابی لاگرانژ و اسپلاین مکعبی طبیعی

هدف این بخش، پیدا کردن تابعی است که از ۶ نقطه مشخص‌شده عبور کند. نقاط ما شامل این موارد هستند: $(۱,۱), (۲,۳), (۳,۵), (۴,۸), (۵,۵), (۶,۲)$

۱.۱ چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ

با داشتن ۶ نقطه، چندجمله‌ای لاگرانژ از درجه ۵ به دست می‌آید. فرمول کلی لاگرانژ بر پایه مجموع ضرب‌های مقادیر y در چندجمله‌ای‌های پایه بنا شده است. پس از اجرای کد پایتون، ضابطه دقیق ریاضی به صورت زیر محاسبه شد:

$$P(x) = ۰.۱۷۵x^۵ - ۲.۹۵۸۳x^۴ + ۱۸.۳۷۵x^۳ - ۵۲.۰۴۱۷x^۲ + ۶۸.۴۵x - ۳۱$$

با اینکه این چندجمله‌ای دقیقاً از تک‌تک نقاط داده‌شده عبور می‌کند، اما نوسان‌های شدیدی در بین نقاط نشان می‌دهد. در علوم کامپیوتر معمولاً از چندجمله‌ای‌های درجه بالا استفاده نمی‌کنیم، زیرا با پدیده رانگ مواجه می‌شویم. این پدیده باعث می‌شود که تابع در فواصل بین نقاط پایانی، رفتارهای غیرعادی و خطای بزرگی داشته باشد که این موضوع ارزش درونیابی را برای نقاط نامشخص کم می‌کند.

۲.۱ اسپلاین مکعبی طبیعی

برای حل مشکل نوسان در چندجمله‌ای‌های درجه بالا، از اسپلاین مکعبی استفاده می‌کنیم که در آن برای هر فاصله بین دو نقطه متوالی، یک تابع درجه ۳ تعریف می‌شود. در حالت طبیعی، مشتق دوم تابع را در نقاط ابتدا و انتها برابر صفر قرار می‌دهیم. ضابطه‌های به دست آمده برای ۵ بازه موجود به این شرح است:

- **در بازه** $[۱,۲]$:

$$S_۱(x) = -۰.۱۸۶۶(x-۱)^۳ + ۲.۱۸۶۶(x-۱) + ۱$$

- **در بازه** $[۲,۳]$:

$$S_۲(x) = ۰.۹۳۳۰(x-۲)^۳ - ۰.۵۵۹۸(x-۲)^۲ + ۱.۶۲۶۸(x-۲) + ۳$$

- **در بازه** $[۳,۴]$:

$$S_۳(x) = -۲.۵۴۵۵(x-۳)^۳ + ۲.۲۳۹۲(x-۳)^۲ + ۳.۳۰۶۲(x-۳) + ۵$$

- **در بازه** $[۴,۵]$:

$$S_۴(x) = ۲.۲۴۸۸(x-۴)^۳ - ۵.۳۹۷۱(x-۴)^۲ + ۰.۱۴۸۳(x-۴) + ۸$$

- **در بازه** $[۵, ۶]$:

$$S_۵(x) = -۰.۴۴۹۸(x-۵)^۳ + ۱.۳۴۹۳(x-۵)^۲ - ۳.۸۹۹۵(x-۵) + ۵$$

اسپلاین مکعبی به دلیل حفظ پیوستگی در مشتق‌های اول و دوم در نقاط مرزِ بین بازه‌ها، منحنی بسیار صاف‌تر و بدون نوسان‌های ناگهانی ارائه می‌دهد. این مدل رفتار بسیار منطقی‌تری برای تقریب نقاط میانی نسبت به لاگرانژ دارد.

۲ تحلیل زمان اجرای الگوریتم‌ها از فایل اکسل

در این بخش کارایی سه الگوریتم مختلف بر روی ورودی‌هایی با حجم ۰۰۱ تا ۰۰۶ کیلوبایت بررسی شده است.

۱.۲ تحلیل نمودارها

- **نمودار خطی:** این نمودار روند تغییر زمان اجرا با افزایش حجم ورودی را نشان می‌دهد. الگوریتم ۳ با افزایش حجم داده زمان اجرای بسیار زیادی پیدا می‌کند که نشان‌دهنده پیچیدگی زمانی بالا مانند نمایی یا چندجمله‌ای با توان بالاست. در مقابل، الگوریتم ۱ تغییر خاصی نمی‌کند و بسیار بهینه است. الگوریتم ۲ نیز شیب ملایم‌تری دارد.

- **نمودار ستونی:** این نمودار مقایسه مستقیم زمان اجرای الگوریتم‌ها در هر حجم مشخص را نشان می‌دهد. با نزدیک شدن به حجم ۰۰۶ کیلوبایت، ضعف الگوریتم ۳ کاملاً مشخص می‌شود و بخش زیادی از منابع را هدر می‌دهد.

- **نمودار جعبه‌ای:** این نمودار نحوه توزیع و تغییرات داده‌های هر الگوریتم را در کل آزمایش نشان می‌دهد. پراکندگی بالا و میانه بزرگ الگوریتم ۳ نشان‌دهنده ناپایداری و بالا بودن زمان اجرای آن در شرایط مختلف است. فشرده بودن نمودار جعبه‌ای الگوریتم ۱ نیز ثبات عملکرد آن را در تمامی حجم‌ها اثبات می‌کند.

۲.۲ اضافه شدن داده جدید

با وارد کردن سطر جدید ۰۰۷ کیلوبایت به فایل اکسل، نمودارهای خطی برنامه بدون خطا و به شکل خودکار آپدیت شدند. این کار نشان داد روند صعودی الگوریتم ۳ همچنان با شدت بیشتری ادامه دارد و زمان اجرای آن به ۰۰۷ ثانیه رسیده است، در حالی که الگوریتم ۱ همچنان پایداری فوق‌العاده خود را در محدوده ۰۸ ثانیه حفظ کرده است.

۳.۲ میانگین زمان اجرای الگوریتم دوم

برای محاسبه میانگین زمان اجرای الگوریتم ۲ به جای استفاده از سطرها به شکل دستی، از فیلتر کردن پویا بر روی مقادیر حجم داده بین ۰۰۱ تا ۰۰۶ کیلوبایت استفاده شد. این روش باعث می‌شود اگر سطرهای فایل جابه‌جا شوند یا داده‌ای اضافه شود، منطق برنامه آسیب نبیند. مقدار میانگین خروجی به خوبی کارایی متوسط این الگوریتم را در بازه کاری استاندارد نشان می‌دهد.

۳ انتگرال‌گیری عددی تابع نمایی

مسئله محاسباتی ما، یافتن مقدار انتگرال زیر در بازه صفر تا یک است:

$$I = \int_{۰}^{۱} e^{x^{۲}}\, dx$$

۱.۳ تحلیل ریاضی تابع

تابع فوق فاقد پادمشتق بر حسب توابع مقدماتی است. یعنی نمی‌توان این انتگرال را با روش‌های معمولی ریاضی مانند تغییر متغیر یا جزء به جزء به یک فرمول بسته تبدیل کرد. پادمشتق این تابع با استفاده از تابع خطای موهومی تعریف می‌شود و به همین دلیل برای به دست آوردن مقدار عددی آن در سیستم‌های محاسباتی، چاره‌ای جز استفاده از روش‌های تقریبی و محاسبات عددی وجود ندارد.

۲.۳ مقایسه نتایج روش‌های عددی

محاسبات روی ۰۰۱ بخش مساوی در بازه انجام شد و نتایج به این شرح است:

- **روش ذوزنقه:** در این روش منحنی تابع در هر بازه با خط راست تقریب زده می‌شود. مقدار انتگرال محاسبه شده حدود ۱.۴۶۲۷ شد. به دلیل تقعر رو به بالای تابع نمایی، روش ذوزنقه کمی بزرگ‌نمایی در محاسبه مساحت دارد.
- **روش سیمپسون:** این روش از تقریب درجه دو استفاده می‌کند و انحنای تابع را بهتر شبیه‌سازی می‌کند. مقدار انتگرال حدود ۱.۴۶۲۶ محاسبه شد که به دلیل انطباق سهمی‌ها بر منحنی نمایی، دقت بسیار بالاتری دارد.
- **روش انتگرال‌گیری گاوسی:** این روش با انتخاب بهینه نقاط و وزن‌ها، دقیق‌ترین تخمین را به دست می‌دهد. مقدار انتگرال در این روش ۱.۴۶۲۶۵۱۷ با خطایی بسیار ناچیز در مرتبه منفی چهارده شد که به عنوان معیار سنجش دقت سایر روش‌ها در نظر گرفته می‌شود.

با مقایسه روش‌ها مشخص می‌شود که روش سیمپسون دقت بسیار بالاتری نسبت به ذوزنقه دارد و مقدار آن به محاسبات کوادراتور گاوسی نزدیک‌تر است. در مسائل علوم کامپیوتر که با توابع غیرخطی و صعودی سروکار داریم، روش سیمپسون همواره انتخاب مطمئن‌تری است.